BẢO TOÀN GIỚI HẠN THUẬN QUA LẤY TỔNG TRỰC TIẾP

Lê Quang Huy[1]

TÓM TẮT

Bài báo chỉ ra được sự bảo toàn của giới hạn thuận qua phép lấy tổng trực tiếp của các họ A-môđun trái trên cùng một định hướng.

Từ khóa: *Giới hạn thuận, A-môđun trái.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Giới hạn thuận là một khái niệm quan trọng trong các lĩnh vực thuộc chuyên ngành đại số. Khái niệm và một số tính chất cơ bản của nó được trình bày trong [1], [2] và [3]. Có thể nói giới hạn thuận như là một khái niệm tổng quát của phép lấy hợp của một họ các phần tử, tuy nhiên giới hạn thuận không phải lúc nào cũng tồn tại trong một phạm trù tùy ý. Giả sử $\{G_i\}_{i\in\Lambda}$ là một họ các A-môđun trái (gọi tắt là A-môđun) và $\{G_i\}_{i\in\Lambda}$ là một hệ thuận trên tập sắp thứ tự bộ phận Λ, khi đó giới hạn thuận của $\{G_i\}_{i\in\Lambda}$ luôn tồn tại (Xem [3, Theorem 2.6.15] và [2, Proposition 5.23]). Do vậy ngoài việc tìm hiểu cấu trúc của môđun giới hạn thuận, các nhà toán học cũng quan tâm và nghiên cứu sự bảo toàn của giới hạn thuận qua một số phép toán cơ bản của môđun chẳng hạn như sự bảo toàn qua lấy tích Tensor xem [1, Exercise 20] và [2, Theorem 5.27] và bảo toàn qua lấy môđun thương.

Mục đích chính của bài báo này là chứng tỏ giới hạn thuận cũng được bảo toàn qua phép lấy tổng trực tiếp các môđun con của một môđun cho trước.

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 1 giới thiệu lại khái niệm và cấu trúc của môđun giới hạn thuận. Mục 2 chỉ ra được sự bảo toàn của giới hạn thuận qua lấy tổng trực tiếp của các họ môđun con trên một tập định hướng (Định lý 3.3). Đây cũng là kết quả chính của bài báo.

2. CẤU TRÚC CỦA GIỚI HẠN THUẬN

Trong bài viết luôn giả thiết A là vành và M là A-môđun trái (gọi tắt là A-môđun).

Giả sử I là một tập sắp thứ tự bộ phận, không mất tính tổng quát ta kí hiệu quan hệ đó là "$\leq$". Một tập sắp thứ tự bộ phận I được gọi là một tập định hướng nếu với mọi $i, j\in I$ luôn tồn tại $k\in I$ sao cho $i\leq k$ và $j\leq k$.

[1] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Định nghĩa 2.1. ([3, Section 5], [3, Definition 2.6.13] và [1, Exsercise 14]) Giả sử $\{G_i\}_{i\in I}$ là một họ các A-môđun và I là một tập sắp thứ tự bộ phận. $\{G_i\}_{i\in I}$ gọi là một hệ thuận các A-môđun ứng với tập chỉ số I nếu với mọi $i, j \in I$ sao cho $i \le j$ luôn tồn tại một đồng cấu $\psi^i_j : G_i \to G_j$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $\psi^i_i : G_i \to G_i$ là đồng cấu đồng nhất với mọi $i \in I$.

ii) Nếu $k \in I$ sao cho $i \le j \le k$ thì $\psi^i_k = \psi^j_k.\psi^i_j$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[rr, "\psi^i_k"] \arrow[dr, "\psi^i_j"'] & & G_k \\ & G_j \arrow[ur, "\psi^j_k"'] & \end{tikzcd}$$

Hệ thuận được định nghĩa như trên kí hiệu là $G = \{G_i, \psi^i_j, i \le j\}$.

Định nghĩa 2.2. ([3, Section 5], [3, Definition 2.6.13] và [1, Exsercise 14]) Giả sử G là một hệ thuận các A-môđun ứng với tập chỉ số I. Giới hạn thuận của hệ G, kí hiệu là $\varinjlim_{i\in I} G_i$ hoặc $\varinjlim G_i$, là một A-môđun và một họ đồng cấu các A-môđun $\alpha_i : G_i \to \varinjlim G_i$ sao cho $\alpha_i = \alpha_j \psi^i_j$, trong đó $i \le j$, thỏa mãn tính chất: với mọi A-môđun X và họ các đồng cấu $g_i : G_i \to X$ sao cho $g_i = g_j \psi^i_j$, tồn tại duy nhất một đồng cấu $g : \varinjlim G_i \to X$ làm cho biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim G_i \arrow[rr, dashed, "g"] & & X \\ & G_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "g_i"'] \arrow[d, "\psi^i_j"] & \\ & G_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "g_j"'] & \end{tikzcd}$$

Trong phạm trù các A-môđun một hệ thuận bất kì luôn tồn tại giới hạn thuận và cấu trúc của nó được mô tả như trong định lý sau:

Định lý 2.3. ([2, Proposition 5.23 và Lemma 5.30]) *Giới hạn thuận của một hệ thuận $\{M_i, \phi^i_j, i \le j\}_I$ các mô đun A-môđun trên một tập chỉ số sắp thứ tự luôn tồn tại* *và* $\varinjlim M_i = (\oplus M_i)/S,$ *với* $S = \{\lambda_j\phi_j^i(m_i) - \lambda_i(m_i) \mid i, j \in I, i \le j, m_i \in M_i\}$ *và* $\lambda_i : M_i \to \oplus M_i$ *là đồng cấu nhúng thứ* i.

Hơn nữa, nếu I là một tập định hướng thì:

(i) Mỗi phần tử của $\varinjlim M_i$ *luôn viết được dưới dạng* $\lambda_i(m_i) + S$.

(ii) $\lambda_i(m_i) + S = 0$ *khi và chỉ khi tồn tại* $t \in I$ *sao cho* $i \le t$ *và* $\phi_t^i(m_i) = 0$.

Như vậy, định lý trên cho thấy nếu *I* là một tập định hướng thì giới hạn thuận của một họ các *A*-môđun được mô tả đơn giản hơn rất nhiều.

Ví dụ 2.4. ([3, Example 5.32 (i)] và [1, Exsercise 17]) Cho *A*-môđun *M* và tập sắp thứ tự toàn phần *I*. Xét họ môđun con $\{M_i, \phi_j^i, i \le j\}_I$ của *M*, trong đó nếu $i \le j$ thì $M_i \subseteq M_j$ và ϕ_j^i là phép nhúng. Khi đó $\{M_i, \phi_j^i, i \le j\}_I$ là một hệ thuận trên tập định hướng *I* và có $\varinjlim M_i \cong \bigcup_{i\in I} M_i$. Thật vậy theo Định lý 2.3 ta có:

$$\varinjlim M_i = (\oplus M_i)/S = \{\lambda_i(m_i) + S \mid i \in I, m_i \in M_i\}$$

Khi đó ta có toàn cấu:

$$f : \bigcup_i M_i \to \varinjlim M_i, f(m_i) = \lambda_i(m_i) + S$$

Giả sử $f(m_i) = 0$ hay $\lambda_i(m_i) + S = 0.$ Theo Định lý 2.3 (ii) tồn tại $t \in I, i \le t$ sao cho $m_i = \phi_t^i(m_i) = 0.$ Vậy ta nhận được $\varinjlim M_i \cong \bigcup_{i\in I} M_i$.

Ví dụ 2.5. ([3, Example 5.32 (iii)]) Giả sử $I = \{N \mid N$ là môđun con hữu hạn sinh của $M\}$. Ta nhận thấy *I* cùng với quan hệ bao hàm "$\subseteq$" là một tập định hướng. Ta xem *I* cũng chính là tập chỉ số trên chính *I*. Khi đó $\{N, \phi_{N'}^N, N \subseteq N'\}_I$ là hệ thuận trên tập định hướng *I*, trong đó $\phi_{N'}^N$ là phép nhúng từ *N* vào *N'* và có $\varinjlim N \cong M$. Thật vậy theo Định lý 2.3 ta có:

$$\varinjlim M_i = (\oplus N)/S = \{\lambda_N(m_N) + S \mid N \in I, m_N \in N\}$$

Khi đó ta có toàn cấu:

$$f : M \to \varinjlim N, f(m_N) = \lambda_N(m_N) + S$$

Giả sử $f(m_N) = 0$ hay $\lambda_N(m_N) + S = 0.$ Theo Định lý 2.3 (ii) tồn tại $N' \in I, N \subseteq N'$ sao cho $m_N = \phi_{N'}^N(m_N) = 0.$ Vậy ta nhận được $\varinjlim N \cong M$.

Ví dụ 2.6. ([3, Example 5.32 (ii)]) Giả sử $\{M_i\}_\Lambda$ là một họ các môđun con của *M*. Đặt:

$$I = \{N = M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_k} \mid i_t \in \Lambda, t = \overline{1,t}, t \in \mathbb{N}\}$$

Trên tập *I* ta xây dựng một quan hệ "$\le$" như sau: $N = M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_k} \le N'$ nếu *N'* có dạng $N' = M_{a_1} \oplus \cdots \oplus M_{a_u} \oplus M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_k} \oplus M_{b_1} \oplus \cdots \oplus M_{b_v}$, trong đó a, b là các số tự nhiên. Khi đó *I* cùng với quan hệ "$\le$" là một tập định hướng. Ta xem *I* cũng chính là tập chỉ số trên chính *I*. Khi đó $\left\{N, \phi_{N'}^{N}, N \le N'\right\}_I$ là hệ thuận trên tập định hướng *I*, trong đó $\phi_{N'}^{N}$ là phép nhúng và có $\varinjlim N \cong \oplus_{i \in \Lambda} M_i$.

Thật vậy theo Định lý 2.3 ta có:

$$\varinjlim M_i = (\oplus N)/S = \{\lambda_N(m_N) + S \mid N \in I, m_N \in N\}$$

Khi đó ta có đồng cấu các *A*-môđun:

$$f : \oplus_{i \in \Lambda} M_i \to \varinjlim N, f(\ldots, 0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, 0, \ldots) = \lambda_N(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}) + S, N = M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_k},\ x_{i_t} \in M_{i_t}$$

Lấy một phần tử bất kì $y \in \varinjlim N$. Theo Định lý 2.3 (i) tồn tại $N \in I$ và $m_N \in N$ sao cho $y = \lambda_i(m_N) + S$. Vì $N \in I$, nên tồn tại $i_t \in \Lambda,\ t = \overline{1, t},\ t \in \mathbb{N}$ sao cho $m_N = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$. Chọn $x = (\ldots, 0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, 0, \ldots)$ ta có $y = f(x)$. Do đó f là toàn cấu.

Giả sử $f(\ldots, 0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, 0, \ldots) = 0$ hay $\lambda_N(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}) + S = 0,\ N = M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_k}$. $\lambda_N(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}) + S = 0,\ N = M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_k}$. Theo Định lý 2.3 (ii) tồn tại $N' \in I, N \subseteq N'$ sao cho $\phi_{N'}^{N}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}) = (0, .., 0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0)$. Suy ra $x_{i_1} = \cdots = x_{i_t} = 0$. Vậy ta nhận được $\varinjlim N \cong \oplus_{i \in \Lambda} M_i$.

3. TỔNG TRỰC TIẾP CỦA GIỚI HẠN THUẬN

Trong mục này, luôn giả thiết *M* là *A*-môđun và $\left\{M_i, \phi_j^i, i \le j\right\}_I$, và $\left\{N_i, \varphi_j^i, i \le j\right\}_I$ là hai hệ thuận các môđun con của *M* trên tập định hướng *I*.

Bổ đề 3.1. Tồn tại họ đồng cấu $\theta_j^i : M_i \oplus N_i \to M_j \oplus N_j (i \le j)$ sao cho $\left\{M_i \oplus N_i, \theta_j^i, i \le j\right\}_I$ là hệ thuận trên tập *I*.

Chứng minh

Xét tương ứng $\theta_j^i : M_i \oplus N_i \to M_j \oplus N_j,\ \theta_j^i(a,b) = (\phi_j^i(a), \varphi_j^i(b))$, trong đó $i \le j$. Dễ dàng nhận thấy θ_j^i là một đồng cấu *A*-môđun. Ngoài ra ta có:

$$\theta_j^i(a,b) = (\phi_j^i(a), \varphi_j^i(b)) = (a,b)$$

hay γ_i^i là các đồng cấu đồng nhất. Mặt khác, vơi $k \in I$ thỏa mãn $i \le j \le k$ ta cũng có:

$$\theta_k^j.\theta_j^i(a,b) = \theta_k^j(\phi_j^i(a), \varphi_j^i(b)) = (\phi_k^j.\phi_j^i(a), \varphi_k^j\varphi_j^i(b)) = (\phi_k^i(a), \varphi_k^i(b)) = \theta_k^i(a,b)$$

Vậy $\left\{M_i \oplus N_i, \theta_j^i, i \le j\right\}_I$ là hệ thuận trên tập chỉ số *I*.

Như vậy theo bổ đề trên luôn tồn tại $\varinjlim(M_i \oplus N_i)$. Theo Định lý 2.3 ta có:

$\varinjlim M_i = \{\alpha_i(m_i) + S_1 \mid i \in I, m_i \in M_i\}$, trong đó

$$\alpha_i : M_i \to \oplus_{i\in I} M_i,\ \alpha_i(m_i) = (...,0,m_i,0,...)$$

$$S_1 = \{\alpha_j \phi_j^i(m_i) - \alpha_i(m_i) \mid i \in I, m_i \in M_i, i \le j\}$$

$\varinjlim N_i = \{\beta_i(n_i) + S_1 \mid i \in I, n_i \in N_i\}$, trong đó:

$$\beta_i : N_i \to \oplus_{i\in I} N_i,\ \beta_i(n_i) = (...,0,n_i,0,...)$$

$$S_2 = \{\beta_j \phi_j^i(n_i) - \beta_i(n_i) \mid i \in I, n_i \in N_i, i \le j\}$$

Kết hợp với Bổ đề 3.1 ta nhận được

$\varinjlim(M_i \oplus N_i) = \{\gamma_i(m_i,n_i) + S \mid i \in I, (m_i,n_i) \in M_i \oplus N_i\}$, trong đó:

$$\gamma_i : M_i \oplus N_i \to \oplus_{i\in I}(M_i \oplus N_i),\ \gamma_i(m_i,n_i) = (...,0,(m_i,n_i),0,...)$$

$$S = \{\gamma_j \theta_j^i(m_i,n_i) - \gamma_i(m_i,n_i) \mid i \in I, (m_i,n_i) \in M_i \oplus N_i, i \le j\}$$

Khi đó ta có thể xây dựng được một ánh xạ từ *A*-môđun $\varinjlim M_i \oplus \varinjlim N_i$ vào *A*-môđun $\varinjlim(M_i \oplus N_i)$ như sau:

Bổ đề 3.2. Tương ứng sau là một ánh xạ:

$$f : \varinjlim M_i \oplus \varinjlim N_i \to \varinjlim(M_i \oplus N_i)$$
$$f(\alpha_i(m_i) + S_1, \beta_j(n_j) + S_2) = \gamma_i(m_i,0) + \gamma_j(0,n_j) + S$$

Chứng minh

Giả sử $(\alpha_i(m_i) + S_1, \beta_j(n_j) + S_2) = (\alpha_u(m_u) + S_v, \beta_v(n_v) + S_2)$. Khi đó ta có:

$$\alpha_i(m_i) - \alpha_u(m_u) + S_1 = 0, \beta_j(n_j) - \beta_v(n_v) + S_2 = 0$$

Vì *I* là tập định hướng, nên luôn tồn tại $k \in I$ sao cho $i \le k, j \le k, u \le k$ và $v \le k$.

Đặt:

$$m_k = \phi_k^i(m_i) - \phi_k^u(m_u) \in M_k,\ n_k = \varphi_k^j(n_j) - \varphi_k^v(n_v) \in N_k$$

Suy ra $\alpha_k(m_k) + S_1 = 0, \beta_k(n_k) + S_2 = 0.$

Từ Định lý 2.3 (ii), ta thấy luôn tồn tại $t \in I, k \le t$ sao cho $\phi_t^k(m_k) = 0$ và $\varphi_t^k(n_k) = 0.$

Dẫn đến $\phi_t^i(m_i) = \phi_t^u(m_u),\ \varphi_t^j(n_j) = \varphi_t^v(n_v).$

Dẫn đến $\gamma_t(\phi_t^i(m_i), \varphi_t^j(n_j)) + S = \gamma_t(\phi_t^u(m_u), \varphi_t^v(n_v)) + S.$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\gamma_t(\phi_t^i(m_i),\varphi_t^j(n_j))+S &= \gamma_t(\phi_t^i(m_i),0)+\gamma_t(0,\varphi_t^j(n_j))+S\\ &= \gamma_t(\varphi_t^i(m_i),\phi_t^i(0))+\gamma_t(\varphi_t^j(0),\varphi_t^j(n_j))+S\\ &= \gamma_t\theta_t^i(m_i,0)+\gamma_t\theta_t^j(0,n_j)+S\\ &= \gamma_i(m_i,0)+\gamma_j(0,n_j)+S\end{aligned}$$

Tương tự ta có $\gamma_t(\phi_t^u(m_u),\varphi_t^v(n_v))+S=\gamma_u(m_u,0)+\gamma_v(0,n_v)+S.$ Do vậy:

$$f(\alpha_i(m_i)+S_1,\beta_j(n_j)+S_2)=f(\alpha_u(m_u)+S_v,\beta_v(n_v)+S_2)$$

Vậy f là một ánh xạ.

Từ các bổ đề trên ta có thể chứng minh được kết quả chính của bài báo. Nội dung của kết quả này là định lý sau:

Định lý 3.3. Với các điều kiện được xác định như Bổ đề trên ta có:

$$\varinjlim(M_i\oplus N_i)\cong\varinjlim M_i\oplus\varinjlim N_i$$

Chứng minh

Theo Bổ đề 3.2 ta có ánh xạ:

$$f:\varinjlim M_i\oplus\varinjlim N_i\to\varinjlim(M_i\oplus N_i)$$

$$f(\alpha_i(m_i)+S_1,\beta_j(n_j)+S_2)=\gamma_i(m_i,0)+\gamma_j(0,n_j)+S$$

Bây giờ ta cần chứng tỏ được f là một đẳng cấu các A-môđun.

Thật vậy, để cho gọn ta kí hiệu:

$x_j^i=(\alpha_i(m_i)+S_1,\beta_j(n_j)+S_2), y_v^u=(\alpha_u(m_u)+S_1,\beta_v(n_v)+S_2).$ Với mọi $r_1,r_2\in A$

Ta có:

$$\begin{aligned}f(r_1x_j^i+r_2y_v^u) &= f(r_1\alpha_i(m_i)+r_2\alpha_u(m_u)+S_1,r_1\beta_j(n_j)+r_2\beta_v(n_v)+S_2)\\ &= \gamma_i(r_1\alpha_i(m_i)+r_2\alpha_u(m_u),0)+\gamma_j(0,r_1\beta_j(n_j)+r_2\beta_v(n_v))+S\\ &= r_1\,[\gamma_i(\alpha_i(m_i),0)+\gamma_j(0,\beta_j(n_j)+S]+r_2[\gamma_u(\alpha_u(m_u),0)+\gamma_v(0,\beta_v(n_v)+S]\\ &= r_1f(x_j^i)+r_2f(y_v^u).\end{aligned}$$

Vậy f là đồng cấu.

Với mọi $\gamma_i(m_i,n_i)+S\in\varinjlim(M_i\oplus N_i),$ ta có $\gamma_i(m_i,0)+\gamma_i(0,n_i)+S$.

Khi đó:

$$f(\alpha_i(m_i)+S_1,\beta_i(n_i)+S_2)=\gamma_i(m_i,n_i)+S$$

Vậy f là một toàn cấu.

Giả sử $f(\alpha_i(m_i)+S_1,\beta_j(n_j)+S_2)=\gamma_i(m_i,0)+\gamma_j(0,n_j)+S=0.$ Vì I là tập định hướng, nên tồn tại $k\in I$ sao cho $i\le k, j\le k$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathrm{i}}(m_i,0)+\gamma_j(0,n_j)+S &= \gamma_{\mathrm{k}}\theta_k^i(m_i,0)+\gamma_k\theta_k^j(0,n_j)+S\\ &= \gamma_k(\phi_k^i(m_i),\phi_k^i(0))+\gamma_k(\varphi_k^j(0),\varphi_k^j(n_j))+S\\ &= \gamma_k(\phi_k^i(m_i),0)+\gamma_k(0,\varphi_k^j(n_j))+S\\ &= \gamma_k(\phi_k^i(m_k),\varphi_k^j(n_j))+S\end{aligned}$$

Theo Định lý 2.3 (ii), tồn tại $t\in I,\ k\le t$ sao cho $\theta_t^k(\phi_k^i(m_k),\varphi_k^j(n_j))=0$ hay $(\phi_t^k\phi_k^i(m_k),\varphi_t^k\varphi_k^j(n_j))=0.$ Suy ra $\phi_t^i(m_i)=0$ và $\varphi_t^j(n_j)=0.$

Bên cạnh đó, $\alpha_i(m_i)+S_1=-\alpha_t\phi_t^i(m_i)+S_1$ và $\beta_j(n_j)+S_2)=-\beta_t\varphi_t^j(n_j)+S_2.$ Do vậy $(\alpha_i(m_i)+S_1,\beta_j(n_j)+S_2)=(0,0).$ Nghĩa là f là đơn cấu. Vậy định lý được chứng minh xong.

Trong trường hợp $\{M_i,\phi_j^i,i\le j\}_I$ là họ các môđun con của môđun *M*, và $\{N_i,\varphi_j^i,i\le j\}_I$ là họ các môđun con của môđun *N*, trong đó *I* là tập sắp thứ tự toàn phần. Khi đó, ta có kết quả sau:

Hệ quả 3.4. $\bigcup_{i\in I}M_i\oplus\bigcup_{j\in I}N_j\cong\bigcup_{k\in I}(M_k\oplus N_k).$

Chứng minh

Theo Ví dụ 2.4 ta có $\varinjlim(M_k\oplus N_k)\cong\bigcup_{k\in I}(M_k\oplus N_k),$ $\varinjlim M_i\cong\bigcup_{i\in I}M_i$ và $\varinjlim N_j\cong\bigcup_{j\in I}N_j.$

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được kết quả của Định lý 3.3 cũng đúng cho n hệ thuận bất kì.

Hệ quả 3.5. Giả sử *M* là *A*-môđun và $\{M_{ki},\phi_{kj}^i,i\le j\}_I$, $k=\overline{1,n}$ ($k=\overline{1,n}$) là n hệ thuận các môđun con của *M* trên tập chỉ số được *I* được sắp thứ tự bộ phận. Khi đó tồn tại họ các đồng cấu $\gamma_j^i:\oplus_{k=1}^n M_{ki}\to\oplus_{k=1}^n M_{kj}(i\le j)$ sao cho $\{\oplus_{k=1}^n M_{ki},\gamma_j^i,i\le j\}_I$ là một hệ thuận trên tập chỉ số *I* và có:

$$\varinjlim(\oplus_{k=1}^n M_{ki})\cong\oplus_{k=1}^n\varinjlim M_{ki}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald (1969), *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley.

[2] J. J. Rotman (2000), *An introduction to homological algebra*, Academic Press.

[3] C. A. Weibel (1997), *An introduction to homological algebra*, Cambridge University press.

DIRECT SUM PRESERVES DIRECT LIMITS

Le Quang Huy

ABSTRACT

In this paper, we show that direct sum of left A-modules preserves direct limits.

Keywords: *Direct limits and left A-modules.*